


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

 Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
20.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.14 Дифференциальные уравнения

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки:** математическое и компьютерное моделирование
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.
- 8. Учебный год:** 2026-2027 **Семестр(ы):** третий

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение типов уравнений, интегрируемых в квадратурах;
- изучение теорем о существовании и единственности решения задачи Коши;
- изучение теории линейных дифференциальных уравнений;
- знакомство с основными фактами теории устойчивости.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина является обязательной частью блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса

«Дифференциальные уравнения»:

- «Математический анализ» (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные, непрерывность, формула Тейлора, числовые и функциональные ряды);
- «Алгебра», «Линейная алгебра» (матрицы, определители, теоремы о разрешимости линейных систем).

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» является необходимой для усвоения таких дисциплин как: «Уравнения с частными производными», «Численные методы», «Методы оптимизации», «Теоретическая механика».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

| Код | Название компетенции | Код(ы) | Индикатор(ы) | Планируемые результаты обучения |
|-------|--|---------|--|---|
| ОПК-1 | Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных | ОПК-1.1 | Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук | Знать: базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. Уметь: использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности Владеть навыками: выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний |
| | | ОПК-1.2 | Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности | |
| | | ОПК-1.3 | Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний. | |

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | | | |
|--|--|--|--|--|

2. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 8/288.

Форма промежуточной аттестации зачёт и экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

| Вид учебной работы | | Трудоемкость | |
|---|--------------|--------------|--------------|
| | | Всего | По семестрам |
| | | | № 3 |
| Аудиторные занятия | | 136 | 136 |
| в том числе: | лекции | 68 | 68 |
| | практические | 68 | 68 |
| | лабораторные | 0 | 0 |
| Самостоятельная работа | | 116 | 116 |
| Форма промежуточной аттестации (зачёт и экзамен – час.) | | 36 | 36 |
| Итого: | | 288 | 288 |

13.1. Содержание дисциплины

| п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК * |
|--------------------------------|---------------------------------|---|---|
| 1. Лекции | | | |
| 1.1 | Элементарная теория. | Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. Замены переменных. О приближенных методах решения. О составлении дифференциальных уравнений. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |
| 1.2 | Задача Коши. | Теорема Коши-Пикара. Другие теоремы существования и единственности. Оператор сдвига, простейшие свойства | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |
| 1.3 | Линейные системы. | Существование и единственность решений линейных систем, оператор сдвига. Фундаментальные системы решений. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные системы с постоянными коэффициентами. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |
| 1.4 | Устойчивость | Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость линейных систем. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Зависимость решений от начальных значений | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |
| 2. Практические занятия | | | |
| 2.1 | Элементарная теория | Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные уравнения и приводящиеся к ним, линейные уравнения и уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах и интегрирующий множитель, уравнения неразрешенные относительно производной, урав- | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |

| | | | |
|-----|------------------|---|---|
| | | нения допускающие понижения порядка, метод изоклин | |
| 2.2 | Задача Коши | Проверка условий теоремы Коши-Пикара в полосе и локальной теоремы Коши-Пикара. Оценка погрешности. Построение интегральной воронки. Проверка свойств оператора сдвига, построения оператора сдвига. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |
| 2.3 | Линейные системы | Линейные системы с постоянными коэффициентами, фундаментальные матрицы, линейные уравнения с постоянными коэффициентами. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |
| 2.4 | Устойчивость | Устойчивость по определению, устойчивость по первому приближению, критерий Гурвица, особые точки линейных двумерных систем. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9665 |

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины | Виды занятий (количество часов) | | | | |
|-------|--|---------------------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
| | | Лекции | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| | Элементарная теория. | 18 | 20 | | 32 | 70 |
| | Задача Коши. | 16 | 14 | | 22 | 52 |
| | Линейные системы. | 18 | 20 | | 32 | 70 |
| | Устойчивость | 16 | 14 | | 30 | 60 |
| | Итого: | 68 | 68 | | 116 | 252 |

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

Самостоятельная учебная деятельность студентов предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-4 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (3 семестр – зачёт, экзамен).

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Дифференциальные уравнения» (URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11906>) на портале «Электронный университет ВГУ».

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

| № п/п | Источник |
|-------|--|
| 1. | Боровских А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : [учебник] / А.В. Боровских, А.И. Перов .— 2-е изд., испр. и доп. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014 .— 548 с. |
| 2. | Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов .— М. ; Ижевск : РХД, 2000 .— 174 с.(и предыдущие издания) |
| 3. | Дифференциальные уравнения: план лабораторных занятий (исправленный и доработанный) : методические указания / И. Ф. Леженина, Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-46.pdf . |
| 4. | Дифференциальные уравнения : материалы к первой аттестации : учебное пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; / И.Ф. Леженина [и др.] .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07213.pdf . |
| 5. | Дифференциальные уравнения : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 1. Элементарная теория / И.Н. Прядко, Л.П. Петрова .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf . |
| 6. | Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 2. Задачи Коши /И.Н. Прядко, Л.П. Петрова - ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-220.pdf |
| 7. | Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 3. Линейные уравнения / сост. /Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-80.pdf |
| 8. | Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 4. Устойчивость / И. Н. Прядко, Л. П. Петрова .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-81.pdf . |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|-------|--|
| 9. | Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : Учебник для студ. мех.-мат. специальностей ун-тов / И.Г. Петровский ; Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейника .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984 .— 295 с. |
| 10. | Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский .— М. : Наука, 1966 .— 331 с |
| 11. | Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Л.С. Понтрягин .— 5-е изд. — М. : Наука, 1982 .— 331 с |
| 12. | Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения : Учебник для студ. вузов, обуч. по спец. "Физика" и "Прикладная математика" / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников .— 3-е изд. — М. : Наука : Физматлит, 1998 .— 231 с. |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

| № п/п | Ресурс |
|-------|---|
| 13. | Электронный Каталог ЗНБ ВГУ https://lib.vsu.ru/zgate?Init+lib.xml, simple.xml+rus |
| 14. | Образовательный портал "Электронный университет ВГУ" |

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

| № п/п | Источник |
|-------|---|
| 1. | Боровских А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : [учебник] / А.В. Боровских, А.И. Перов .— 2-е изд., испр. и доп. — Воронеж : Издательско- |

| | |
|----|--|
| | полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014 .— 548 с. |
| 2. | Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов .— М. ; Ижевск : РХД, 2000 .— 174 с. |
| 3. | Дифференциальные уравнения: план лабораторных занятий (исправленный и доработанный) : методические указания / И. Ф. Леженина, Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-46.pdf . |
| 4. | Дифференциальные уравнения : материалы к первой аттестации : учебное пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; / И.Ф. Леженина [и др.] .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07213.pdf . |
| 5 | Дифференциальные уравнения : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 1. Элементарная теория / И.Н. Прядко, Л.П. Петрова .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf . |
| 6. | Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 2. Задачи Коши /И.Н. Прядко, Л.П. Петрова - ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-220.pdf |
| 7. | Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 3. Линейные уравнения / сост. /Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-80.pdf |
| 8. | Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 4. Устойчивость / И. Н. Прядко, Л. П. Петрова .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ : http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-81.pdf . |

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Информационная лекция, практическое занятие, лекция-визуализация, практическое занятие в форме презентации, самостоятельное изучение лекционного материала на основе предлагаемых электронных учебников, практическое домашнее задание, контрольная работа, экзамен

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации; специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|-------|--|----------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 1. | Элементарная теория | ОПК-1 | ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 | КИМ – контрольная работа 1 |
| 2. | Задача Коши | ОПК-1 | ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 | КИМ – контрольная работа 1 |
| 3. | Линейные системы | ОПК-1 | ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 | КИМ – контрольная работа 2, |
| 4. | Устойчивость | ОПК-1 | ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 | КИМ – контрольная работа 2 |

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|--|--|----------------|-------------------------------------|---|
| Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт и экзамен | | | | Перечень вопросов Практическое задание |

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ, презентаций и проверки домашнего задания, содержание которых приведено ниже. Домашнее задание выполняется каждым студентом самостоятельно и обсуждается на следующем занятии. Студенты тренируются дома строит поле направлений с помощью прикладных пакетов или создают свои программы и демонстрируют результаты на занятии. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться средствами связи (включая сеть Интернет), но можно пользоваться любыми печатными и рукописными материалами, ограничение по времени — 90 астрономических минут.

1. Перечень домашних заданий приведён в методичке *“Дифференциальные уравнения: план лабораторных занятий (исправленный и доработанный): методические указания”*

2. Примеры контрольных работ

Пример контрольной работы № 1

Решить уравнения

$$1. y' - y^4 \cos x = y \operatorname{tg} x$$

$$2. (x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$$

$$3. (x^2 + y^2 + y) dx + (2xy + x + e^y) dy = 0$$

$$4. 3y'^4 = y' + y$$

5. Покажите, что задача Коши

$$x' = (\operatorname{tg} t) \sin(t+x), \quad x(0) = 0$$

имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ единственное решение.

Пример контрольной работы № 2

1. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-1), \\ \dot{y} = xy + 2. \end{cases}$$

2. Найти частное решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = e^{-x}$$

и исследовать его на устойчивость.

3. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$$

4. 3. Решить систему:

$$\begin{cases} x' = 3y - x + 4t, \\ y' = 3y - x + 2 \end{cases}$$

и найти $\bar{g}_0^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Для системы линейный уравнений определить тип особой точки, построить эскиз фазового портрета, определить направления движения

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$

| Критерии оценивания компетенций | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|---|--------------------------------------|---------------------|
| Обучающийся в полной мере умеет классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Верно выполнены все задания контрольной работы. | <i>Повышенный уровень</i> | отлично |
| Обучающийся в целом умеет классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. В решениях допущены незначительные ошибки или правильно выполнены четыре из пяти заданий. | <i>Базовый уровень</i> | хорошо |
| Обучающийся фрагментарно способен классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, не умеет исследовать дифференциальные уравнения или допускает существенные ошибки. В решениях допущены существенные ошибки или правильно выполнены три из пяти заданий | <i>Пороговый уровень</i> | удовлетворительно |
| Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки. | – | неудовлетворительно |

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Собеседование по экзаменационным билетам

Зачет ставиться по результатам контрольных работ.

| №№ п/п | Темы к текущей аттестации (экзамену) |
|--------|---|
| 1. | Основные определения. |
| 2. | Теорема об уравнении с разделенными переменными. |
| 3. | Утверждение об общем решении ЛОУ. |
| 4. | Свойства решений ЛУ. |
| 5. | Утверждение о различных трактовках симметричного уравнения. |
| 6. | Теорема об интегрировании УПД. |
| 7. | Признак полного дифференциала и алгоритм нахождения ПФ. |
| 8. | Уравнение колебательного контура. |
| 9. | Математическая модель системы «хищник-жертва». |
| 10. | Уравнение маятника. |
| 11. | Метод изоклин (пример). |
| 12. | Метод ломаных Эйлера (пример). |
| 13. | Формулировка теоремы Коши–Пикара. |
| 14. | Лемма об эквивалентном интегральном уравнении. |
| 15. | Определение последовательных приближений. |
| 16. | Лемма о сближении |
| 17. | Лемма о сходимости |
| 18. | Оценка погрешности |
| 19. | Лемма о сходимости |
| 20. | Формулировка теоремы Коши–Пикара с переменной константой Липшица. |
| 21. | Формулировка локальной теоремы Коши–Пикара. |
| 22. | Теорема Коши–Пикара для уравнения n -го порядка. |
| 23. | Формулировка теоремы Пеано; интегральная воронка. |
| 24. | Теорема Коши–Пикара для комплексной нормальной системы. |
| 25. | Оператора сдвига для (НС) и (НАС). |
| 26. | Теорема об ОС для ЛОС. |
| 27. | Теорема о структуре множества решений ЛОС. |
| 28. | Утверждение о решениях и ОС для ЛС. |
| 29. | Теорема о фср ЛАОС. |
| 30. | Теорема о выделении вещественных решений. |
| 31. | Сведение уравнения n -го порядка к системе. |
| 32. | Общее решение ЛНУ n . |
| 33. | Теорема о фср ЛАОУ n . |
| 34. | Основные определения теории устойчивости. |
| 35. | Утверждение о приведенной системе. |
| 36. | Критерий устойчивости ЛС |
| 37. | Критерий устойчивости ЛСПК. |
| 38. | Критерий Гурвица. |
| 39. | Критерий Михайлова |

| | |
|-----|---|
| 40. | Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. |
| 41. | Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. |

Примеры практических заданий на экзамене

- Исследуйте на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения, если оператор сдвига для него задается формулой $g_1^t x_0 = \frac{x_0}{t}$, $t \in [1, +\infty)$
- Верно ли следующее утверждение: если уравнение $x' = f(t, x)$ есть следствие уравнения $x' = g(t, x)$, то любое решение первого уравнения является решением второго? А наоборот?

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков. КИМ содержит два теоретических вопроса и одно практическое задание. По желанию обучающегося практическое задание может быть заменено на следующее задание, выполняемое в течение семестра: найти практическую задачу, сводящуюся к дифференциальным уравнениям и представить её компьютерную модель.

| Критерии оценивания компетенций | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|--|--------------------------------------|---------------------|
| Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами дисциплины, умеет связать теорию с практикой, классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. | Повышенный уровень | Отлично |
| Обучающийся владеет теоретическими основами дисциплины; в целом, умеет связать теорию с практикой, классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, но допускает незначительные ошибки, неточности, испытывает затруднения при решении практических задач | Базовый уровень | Хорошо |
| Обучающийся частично владеет теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, не умеет исследовать дифференциальные уравнения или допускает существенные ошибки, не умеет связать теорию с практикой. | Пороговый уровень | Удовлетворительно |
| Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки. | – | Неудовлетворительно |

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Введение параметра $p = y'$ рекомендуется для решения уравнения

ОТВЕТ: 1)

Решение: Введение параметра $p = y'$ рекомендуется для решения уравнения первого порядка неразрешенного относительно производной, в случае, когда разрешить его относительно производной сложно, но можно представить в виде: $y = f(x, y')$ или $x = f(y, y')$.

1) $y = \sqrt{x} - \sin y' + y'$

2) $y' = y\sqrt{x} - \sin x + 2y^2$

3) $y' = \sqrt{x} \sin y$

2. Частные решения, каких уравнений могут быть найдены только методом вариации произвольных постоянных?

Ответ: 1) и 3)

Решение: Линейное неоднородное уравнение, правая часть которого не имеет специальный вид, решается только методом вариации произвольных постоянных. Правая часть уравнения $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$ и

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ не специального вида, поэтому используется метод вариации произвольных постоянных.

1) $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$

2) $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$

3) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

4) $y'' - 9y' = e^{3x} \cos x$

3. Для линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$ фундаментальную систему решений образуют функции...

Ответ: 1) и 4)

Решение: Для линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$ корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 1$. Так как корни простые действительные, то фундаментальная система решений имеет вид $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Соответственно для нашего случая $y_1 = e^{4x}$ и $y_2 = e^x$

1) $y = e^{4x}$

2) $y = e^{-5x}$

3) $y = e^{5x}$

4) $y = e^x$

4. Для какого уравнения функция $\mu = e^y$ является интегрирующим множителем ?

Ответ: 3)

Решение: Интегрирующим множителем для уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, называется такая функция $\mu(x, y) \neq 0$, после умножения, на которую дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение в полных дифференциалах. При умножении $\cos x dx - (y - \sin x)dy = 0$ на $\mu = e^y$ получаем уравнение в полных дифференциалах $e^y \cos x dx - e^y (y - \sin x)dy = 0$

1) $xydx + (1 + x^2)dy = 0$

2) $ydx - (y^2 + 3x)dy = 0$

3) $\cos x dx - (y - \sin x)dy = 0$

5. Какие из перечисленных уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах?

Ответ: 3) и 4)

Решение: Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, для которого выполняется $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ является уравнением в полных дифференциалах.

1) $y' - y^4 \cos x = y \operatorname{tg} x$

2) $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$

3) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$

4) $y \cos x dx - (2y - \sin x)dy = 0$

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Определить тип особой точки системы

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Ответ: седло

Решение: Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda),$$

$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$, $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$. Следовательно, особая точка седло.

2. Определить тип особой точки уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - y}$$

Ответ: центр

Решение: найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2,$$

$\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = \pm i$. Следовательно, особая точка центр.

3. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$2y''' + y'' + 2y' + 3y = 0$$

Ответ: неустойчиво

Решение: Выпишем матрица Гурвиц: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислим её главные диагональные миноры: $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$. Следовательно, по критерию Рауса-Гурвица нулевое решение неустойчиво.

4. Определить тип уравнения

$$y' = \frac{y}{x} (\ln y - \ln x)$$

Ответ: однородное

Решение: Уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, которое не изменяется при одновременной замене «х» на «кх» и «у» на «ку», называется однородным.

5. Указать наибольшее целое a , при котором асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\text{мы} \begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2 \end{cases}$$

Ответ: -2

Решение: Матрица линеаризованной системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(a - \lambda) - 1,$$

$(\lambda - a)^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = a + 1, \lambda_2 = a - 1$. Для асимптотической устойчивости корни характеристического уравнения должны быть отрицательны: $a + 1 < 0$.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).